

## Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática

Conceição Almeida & Floriano Viseu  
Universidade do Minho, Portugal

### Resumo

Os actuais programas de Matemática, ao procurarem adoptar orientações provenientes de resultados de investigação no campo da Educação Matemática, alertam para a importância de se abordar, sempre que possível, os conceitos matemáticos através das suas diferentes representações. Com a abordagem numérica, analítica e gráfica do conceito de derivada, pretende-se, relacionar as diferentes formas de representação, de modo a evidenciar o seu significado, e a tornar a sua aprendizagem significativa. Contudo, em geral, os alunos manifestam preferência pela abordagem analítica, em detrimento da abordagem gráfica, o que poderá ter origem em abordagens de ensino predominantemente analíticas. Neste contexto, procurou-se averiguar, a partir de uma análise de natureza interpretativa dos resultados de um questionário sobre representações gráficas da derivada de uma função aplicado a 19 estagiários de matemática, as dificuldades destes em interpretar e relacionar os gráficos de uma função e os das suas derivadas.

### Introdução

A *derivada de uma função* faz parte dos programas dos 11º e 12º anos de escolaridade, sendo os conhecimentos básicos sobre este conceito essenciais, tanto para uma boa integração dos alunos ao nível universitário, nas Análises Matemáticas, como pré-requisitos em todas as disciplinas científicas que utilizam a matemática como *ferramenta*. Em particular, salienta-se a importância do estudo de funções e a resolução de problemas

do dia-a-dia que envolvam a necessidade de maximizar/minimizar situações modeladas por uma função (DES, 1997).

O conceito de derivada tem continuado a ser contemplado nas sucessivas reformas curriculares do ensino de Matemática, fazendo parte dos programas anteriores e posteriores à última reforma iniciada em 1991, conquanto algumas alterações tenham sido introduzidas nas várias reformas, quer no que respeita aos temas a tratar (foi retirado por exemplo, o conceito de derivada das funções trigonométricas inversas), quer na abordagem a utilizar no seu ensino. Embora os programas dos 11<sup>o</sup> e 12<sup>o</sup> anos anteriores a 1991 recomendassem que se explorasse a representação gráfica no ensino de derivadas, os procedimentos analíticos eram os mais valorizados devido à influência do rigor e do formalismo provenientes da reforma da Matemática Moderna (Teresa Pimentel, 1995). Por outro lado, na luta contra o tempo, optava-se pela componente técnica em detrimento da capacidade imaginativa, introduzindo-se a definição de derivada sem a relacionar com uma situação concreta e passando-se de seguida à aprendizagem das regras de derivação aplicadas em exercícios complicados e desligados de qualquer contexto real (Teresa Pimentel, 1995). Na verdade, nem sempre se exploravam as suas diferentes representações, sendo os conceitos inerentes à derivada de uma função transmitidos de uma forma desligada da sua componente gráfica, e sem qualquer análise crítica da importância dos seus significados.

As recomendações actuais para o ensino de Matemática patentes nos programas escolares procuram salvaguardar esta situação defendendo que “o estudo das funções — Introdução ao Cálculo Diferencial I — deve ser feito colocando em primeiro plano abordagens gráficas e intuitivas e relacionando de forma sistemática abordagens gráficas e analíticas” (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1998, pp. 8-9). Pretende-se assim uma abordagem inicial intuitiva e informal das ideias centrais da análise matemática que possa contribuir para um aprofundar da sua compreensão (NCTM, 1991; DES, 1997).

A livre utilização da calculadora gráfica, recomendada pelos programas em vigor, veio contribuir para “reforça[r] o papel da linguagem gráfica” (Ponte, 1995, p. 2), esperando-se assim desenvolver nos alunos a capacidade de comunicação ao “exprimirem o mesmo conceito em diversas

formas ou linguagens" (DES, 1997, p. 4). Contudo, tal capacidade não é fácil de desenvolver se nos processos de ensino/aprendizagem não se explorarem as possíveis representações dos conceitos matemáticos. Relativamente ao conceito de derivada, existem evidências de que alunos universitários manifestam dificuldades em relacionar as representações analítica e gráfica (Tall, 1994; Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997), o que poderá levar a pensar que o mesmo possa acontecer com professores estagiários.

A identificação destas dificuldades é importante na medida em que permitirá, não só contribuir para delas consciencializar os professores estagiários, mas também promover a sua mudança. Neste sentido, procurou-se averiguar como professores estagiários analisam, numa perspectiva gráfica, os conceitos inerentes à *derivada de uma função*.

## Fundamentação teórica

### A importância da visualização na construção do conhecimento matemático

A aquisição do conhecimento matemático processa-se, fundamentalmente, através de *representações* e de *modelos*. As representações podem ser internas ou externas. As representações internas são imagens mentais construídas sobre a realidade, referindo-se a modelos cognitivos, conceitos ou objectos mentais, não sendo, portanto, directamente observáveis, e podendo apenas ser inferidas através da acção e das palavras dos indivíduos. Por seu lado, as representações externas são construídas para ilustrar uma dada situação matemática, incluindo as notações simbólicas ou gráficas, específicas de cada conceito (e. g., a notação decimal para a escrita dos números reais; o gráfico cartesiano, para a correspondência entre um ponto do plano e um par de números; os pontos do círculo trigonométrico, cujas coordenadas representam os valores das funções seno e cosseno) (Castro & Castro, 1997).

Castro e Castro (1997) definem *modelos* como esquemas ou materiais estruturados, conectados mediante leis e regras, que oferecem uma imagem de um determinado conceito com respeito a determinadas relações e propriedades (e. g., o geoplano é um modelo finito do plano).

Pensando sobre conceitos matemáticos formamos imagens mentais, ou seja, representações internas, comunicando-as através de representações externas. Nem todas as imagens mentais envolvem características figurativas ou gráficas, mas quando estas predominam, fala-se de visualização. A capacidade para visualizar qualquer conceito matemático requer habilidade para interpretar e entender informação figurativa sobre o conceito, para manipulá-la mentalmente e para expressá-la sobre um suporte material (Castro & Castro, 1997). Quando se usam representações gráficas como ferramentas para interpretar conceitos matemáticos, a visualização não é um fim em si mesma, mas um meio para chegar à compreensão.

Em geral, os alunos não fazem a ligação do pensamento visual com o pensamento analítico o que, de alguma forma, pode ser um reflexo do tipo de ensino a que são submetidos e em que há alguma desvalorização do raciocínio que faz uso da informação visual (Tall, 1994). Razões de natureza vária podem estar na origem desta tendência. Uma primeira, seria a crença, por parte de matemáticos, professores e alunos, de que a matemática não é visual e de que o que é visual não é matemática mesmo que esteja na origem de uma ideia matemática. Uma segunda, referida como a dificuldade da transposição didáctica, tem a ver com o facto de, normalmente, um matemático apresentar de uma forma linear e compartimentada todo um conhecimento científico cheio de conexões difíceis de apresentar de forma sequencial. A terceira razão é de natureza cognitiva e tem a ver com a quantidade, complexidade e concentração de informação explícita numa representação visual e implícita na representação analítica (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

Segundo Tall (1994), a visualização pode assumir um papel complementar na percepção global de alguns conceitos matemáticos. De acordo com este autor, é desejável que os alunos, em vez de aprenderem apenas uma vasta série de algoritmos e um complicado sistema de regras que lhes diz que procedimento usar e quando, antes desenvolvam representações mentais ricas dos conceitos, pois só assim poderão ter sucesso em Matemática. Contudo, parece ser consensual que é difícil fazer com que os alunos se sintam à vontade a utilizar representações visuais e analíticas de uma mesma situação e a passar facilmente de um tipo de representação para o outro (Eisenberg & Dreyfus, 1991).

A predominância das abordagens algébricas no ensino da Matemática devem-se assim, quer à crença de que a prova visual não é realmente uma prova matemática e de que o modo analítico é normalmente mais usado que o modo gráfico ou visual para resolver problemas rotineiros, quer ao facto de os professores colocarem aos alunos poucas questões que exijam a aplicação de capacidades visuais (Vinner, 1989). Esta crença de que a prova visual é pouco consistente encontrará, porventura, fundamento a partir da Geometria, onde “ver” não é considerado “provar”. Já na Álgebra e na Análise as representações gráficas parecem desempenhar um papel crucial considerando alguns autores que o ensino de noções algébricas deve ser abordado a partir de uma interpretação visual (Vinner, 1989). Por outro lado, visto que se complementam a compreensão alcançada mediante processamento de informação visual e a que se consegue por procedimentos analíticos, o ensino/aprendizagem deverá efectuar-se integrando ambos os tipos de representação (Hallett, 1991).

Em geral, os professores evitam argumentos visuais, porque consideram que o argumento analítico: a) é pequeno e perfeito, conduzindo ao resultado sem exigir grandes explicações; b) é fácil de aprender e de aplicar a exercícios; c) é fácil de ensinar, não requerendo preparação de gráficos, slides ou de qualquer programa computacional; d) corresponde àquilo que os alunos esperam de uma prova matemática.

No que respeita à aprendizagem do conceito de derivada, a visualização parece desempenhar um papel importante, em particular, na compreensão de relações e de significados implícitos (Tall, 1989; Eisenberg & Dreyfus, 1991). No entanto, segundo, entre outros, Eisenberg e Dreyfus (1991), Tall (1994) e Aspinwall, Shaw e Presmeg (1997) é pouco frequente, pedir-se aos alunos para fazerem interpretações geométricas das derivadas de uma função. Raramente os alunos determinam a recta tangente à curva de uma função num dado ponto a partir de uma resolução gráfica.

No entanto, se alguns autores salientam as vantagens de abordagens visuais no ensino de matemática, outros argumentam que uma compreensão gráfica vívida dinâmica pode contribuir para que sejam esquecidos aspectos analíticos essenciais dos conceitos (Aspinwall *et al.* 1997).

### O conceito de derivada

Num estudo sobre as diferentes representações do conceito de derivada, Orton (1983), através de entrevistas individuais realizadas a 110 alunos ingleses com pelo menos um ano de Cálculo, concluiu que os alunos apresentam um domínio razoável dos algoritmos necessários para o cálculo de derivadas (pelo menos para funções simples), mas que evidenciam dificuldades na conceptualização geométrica de limite e no uso de representações gráficas do conceito de derivada. Na verdade, quando questionados sobre o que acontece às secantes  $PQ_n$ , quando o ponto  $Q_n$  se move sobre a curva aproximando-se do ponto fixo  $P$  (Figura 1), 43 alunos foram incapazes, mesmo quando a isso induzidos, de concluir que o processo conduzia à recta tangente à curva no ponto  $P$ .

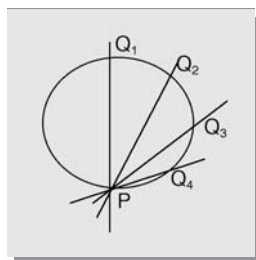


Figura 1 - Figura do estudo de Orton (1983, p. 245)

No caso do uso de representações gráficas, os alunos participantes no estudo mostraram-se capazes de responder correctamente a perguntas do tipo “calcule o declive da recta tangente à curva de  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  quando  $x = 3$ ” mas, quando confrontados com o mesmo tipo de questão a partir do gráfico, 96 alunos mostraram dificuldades.

Resultados semelhantes foram obtidos por Artigue e Viennot (citados em Dreyfus, 1990) com alunos do primeiro ano de Análise. De facto, neste estudo, os autores verificaram que os alunos possuem imagens geométricas muito pobres dos conceitos de Cálculo, e que, embora sendo capazes de calcular derivadas, não compreendem a derivada como uma aproximação. Segundo os autores, isto pode ser devido ao facto de os alunos aprenderem os processos de cálculo (limites, derivadas, etc...) a um nível puramente algorítmico e com reduzido recurso a imagens do conceito.

Existe uma diferença considerável entre o modo como os alunos descrevem o conceito de derivada e o modo como o aplicam. Num estudo efectuado com oitenta e nove alunos franceses do primeiro ano da universidade de um curso de Matemática, este autor verificou que, na descrição do conceito, os alunos recorrem à aproximação à recta tangente, de acordo com a definição que lhes fora ensinada. No entanto, quando precisam aplicar o conceito, a condição de posição limite das secantes não é usada mas antes substituída por algoritmos algébricos (Artigue, 1991).

Num outro estudo com 119 alunos universitários israelitas, no início de um curso de Cálculo, verificou-se que apenas 6% possuíam uma concepção correcta de derivada como um limite, e 25% perfilhavam uma concepção correcta de derivada segundo uma interpretação visual, o que significa que os alunos recordam melhor os aspectos visuais do conceito de derivada do que os seus aspectos analíticos (Vinner, 1992). Segundo o autor do estudo, isto pode dever-se ao facto de a memória humana “trabalhar” melhor com figuras do que com palavras. Por outro lado, 23% dos sujeitos evidenciam uma concepção instrumental de derivada que relaciona o conceito com os métodos de a obter ou com as suas aplicações, mas que ignora o seu significado. Para o mesmo autor, este é um problema que ocorre quando os conceitos são usados como uma ferramenta, o que tem como consequência o esquecimento do significado original do conceito. Vinner refere ainda que 46% dos participantes formularam respostas de uma forma vaga, imprecisa e sem sentido, o que indicava que os alunos recordavam palavras, símbolos e gráficos relacionados com derivadas, sem, no entanto, parecerem ser detentores dos seus significados.

Vinner (1992), referindo a distinção feita por Skemp entre compreensão relacional (saber porquê: saber como um algoritmo funciona) e compreensão instrumental (saber como: saber levar a cabo um algoritmo), afirma que há uma tendência para a compreensão instrumental prevalecer sobre a relacional. Tal facto pode dever-se às práticas de ensino, nas quais, a maior parte das vezes, apenas se exploram as representações gráficas da derivada na introdução do conceito, para se concluir que é a posição limite das sucessivas secantes que passam nesse ponto, enfatizando-se depois a capacidade de aplicação das diferentes regras de derivação (Riddle, 1994).

Esta mesma tendência da prevalência da compreensão instrumental sobre a relacional foi também observada por Ferrini-Mundy e Graham (citados em Ferrini-Mundy & Lauten, 1994) num estudo efectuado com uma aluna universitária americana a quem foi pedido um possível esboço gráfico da primeira derivada de várias funções apresentadas graficamente. A aluna em vez de usar a informação proveniente dos respectivos gráficos, procurou traduzir cada um deles por uma expressão analítica para, de seguida, encontrar, através das regras de derivação, a função derivada e depois desenhar o gráfico pretendido.

Procedimento análogo foi observado em alunos universitários americanos na interpretação gráfica de derivada (Asiala *et al.*, 1997). Os autores do estudo verificaram que alguns alunos integraram o valor do declive da recta tangente num dado ponto como uma constante, para encontrarem uma expressão linear que usaram para representar a função original. Tal procedimento evidencia a necessidade sentida pelos alunos de terem uma expressão que representasse a função a derivar para depois calcularem o que se pedia, em vez de trabalharem com os dados locais e com a ideia de derivada como o declive da recta tangente no ponto.

Da análise dos estudos mencionados, constata-se que, em geral, os alunos evitam as abordagens gráficas e apresentam dificuldades quando têm que usá-las, talvez porque no ensino do conceito de derivada predominam as abordagens analíticas, as quais, só por si, não desenvolvem a capacidade para analisar gráficos, nem a compreensão de conceitos como, por exemplo, o de declive e o de recta tangente (Aspinwall *et al.*, 1997). Contudo, por vezes, uma compreensão gráfica demasiado viva pode contribuir para ofuscar aspectos analíticos essenciais dos conceitos, como mostra o resultado de um estudo de caso realizado com um aluno de Cálculo. De facto, o aluno, ao procurar esboçar o gráfico da derivada de uma função a partir da representação gráfica desta, ignora aspectos analíticos esquecendo que deverá ser tido em conta o grau da função (Aspinwall *et al.*, 1997). Os autores chamam a atenção para a confusão e a frustração sentida por este aluno, o qual demonstrou ser do tipo harmónico pictórico caracterizado por Krutetskii (citado em Aspinwall *et al.*, 1997):

“...componentes lógico-verbal e visual-pictórica igualmente fortes e equilibradas; conceitos espaciais bons. ...pode usar suportes visuais na resolução de problemas e prefere fazê-lo” (p. 304).



Com base nos resultados deste estudo de caso, Aspinwall *et al.* (1997) alertam, não só para a possibilidade de a utilização excessiva de gráficos colocar problemas à compreensão dos alunos, mas também, conseqüentemente, para a necessidade de definir com clareza o papel pedagógico das representações gráficas.

### Objectivos e metodologia do estudo

Foi objectivo deste estudo investigar como professores estagiários analisam e interpretam a informação explícita nos gráficos de uma função e das suas 1ª e 2ª derivadas e a relacionam.

A recolha de informação foi efectuada através de um questionário, com 10 questões de resposta aberta a que responderam 19 professores estagiários de Matemática. As questões utilizadas foram traduzidas e adaptadas das utilizadas por outros autores (Artigue, 1991; Roberts, 1996; Stick, 1997) e de exames nacionais do 12º ano. A tabela 1 apresenta a distribuição das questões pelas diferentes categorias consideradas.

Para validação de conteúdo, foi previamente pedida a opinião de três investigadores, dois da área científica de Educação e um da área científica de Matemática, quanto à pertinência, à extensão, à clareza e à correcção formal das questões. Para melhor aferir, quer a clareza das questões e o grau de dificuldade das mesmas, quer o tempo necessário para o seu preenchimento, o questionário foi aplicado a alunos do 4º ano da Licenciatura em Ensino de Matemática, alunos pré-estagiários, que se pensou situarem-se num nível científico muito próximo do dos professores estagiários.

**Tabela 1 - Distribuição das questões pelas categorias**

Categoria	nº da questão
Relação entre o gráfico de uma função e o da sua 1ª derivada	1, 2, 7, 9.1
Relação entre o gráfico de uma função e o da sua 2ª derivada	3, 4, 8
Relação entre o gráfico da função 1ª derivada e o da função 2ª derivada	5, 9.2
Significados dos zeros das 1ª e 2ª derivadas	6, 10

O tempo de resposta dos 19 professores estagiários oscilou entre 2 a 3 horas.

Porque se pretendia compreender as respostas dos estagiários e identificar os significados que as situações para eles assumiam, optou-se por uma análise de dados de natureza interpretativa (Borg & Gall, 1989). As respostas às questões (exceptuando as questões 6, 9 e 10 que, atendendo à sua especificidade, foram apenas classificadas em *correctas*, *incorrectas* e *não responde*) foram objecto de análise de conteúdo com vista à sua classificação segundo os seguintes tipos:

- *resposta correcta*, se todos os aspectos da questão tiverem sido tidos em conta;
- *resposta parcialmente correcta*, se incluir alguns aspectos correctos e outros não correctos;
- *resposta incorrecta*, se não considerar qualquer aspecto da questão;
- *não responde*, se não der qualquer resposta à questão.

Para cada questão, são apresentadas as frequências dos tipos de respostas, bem como a análise qualitativa efectuada. Quer as respostas parcialmente correctas, quer as incorrectas, foram submetidas a uma análise qualitativa de conteúdo, com vista à identificação das concepções subjacentes, e a fim de melhor se identificar e compreender os raciocínios dos estagiários.

## Apresentação e análise dos resultados

A Tabela 2 apresenta a distribuição das respostas dos 19 estagiários às 10 questões do questionário de acordo com os tipos de resposta definidos.

**Tabela 2 - Distribuição das respostas dos 19 professores estagiários pelos diferentes tipos definidos (f)**

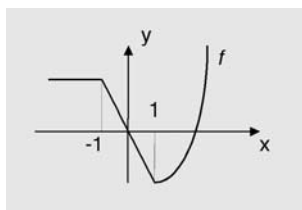
Tipo de resposta	Questões																	
	1	2	3	4	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	6.4	7	8	9.1a	9.1b	9.2a	9.2b	10.a	10.b
Correcta	2	2	5	2	3	3	4	10	8	7	2	2	9	2	2	2	2	7
Parcialmente correcta	16	9	1	9	1	0					6	4						
Incorrecta	1	6	6	4	11	3	12	1	6	0	6	2	3	10	8	8	13	5
Não responde	0	2	7	4	4	13	3	8	5	12	5	11	7	7	9	9	4	7

Da análise da tabela 2 constata-se que a maioria dos estagiários não interpretou, nem relacionou convenientemente, numa perspectiva gráfica, os vários aspectos inerentes ao estudo da derivada de uma função. Apenas em duas questões (6.2 e 9.1a) a frequência de respostas correctas atinge os 50%.

### **Análise de conteúdo das respostas para cada categoria considerada**

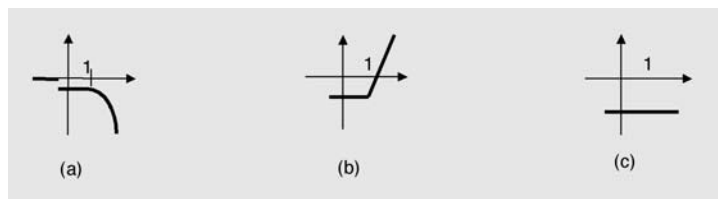
#### ***Relação entre o gráfico de uma função e o gráfico da sua 1ª derivada***

Na primeira questão pedia-se um esboço do gráfico da função  $f'$  a partir da interpretação do gráfico de uma função  $f$  (Figura 2). Este esboço deveria esclarecer a relação entre a monotonia de  $f$  e o sinal de  $f'$  e o significado dos pontos angulosos do gráfico de  $f$  na representação gráfica da sua derivada.



**Figura 2 - Esboço gráfico da função  $f$ ,  
dado na questão 1 do questionário**

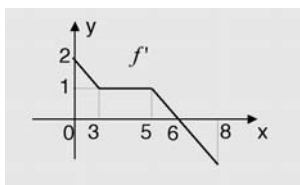
No entanto, nem todos estes aspectos foram tidos em conta. O elevado número de respostas (16) parcialmente correctas dos estagiários deveu-se, por um lado, à consideração dos pontos angulosos do gráfico da função como sendo pontos pertencentes ao domínio de  $f'$  e, por outro lado, ao facto de no intervalo  $]1, +\infty[$ , não terem relacionado correctamente a monotonia de  $f$  com o sinal de  $f'$ . Neste intervalo, surgiram representações de  $f'$  como uma curva decrescente e de valores negativos (Figura 3a), ou como uma semi-recta com declive positivo, mas com uma parte negativa e outra positiva (Figura 3b), ou ainda como uma função constante e negativa (Figura 3c).



**Figura 3 - Alguns esboços gráficos da função  $f'$  efectuados pelos estagiários, relativos à questão 1**

Enquanto que no intervalo  $]-1, 1[$  a maioria dos estagiários (17) respondeu correctamente a partir da identificação de  $f$  como sendo  $f(x) = -x$  e consequentemente  $f'(x) = -1$ , no intervalo  $]1, +\infty[$  a identificação de uma expressão analítica de  $f$  não se tornou tão fácil. O que parece que alguns estagiários fizeram, foi terem identificado  $f$  neste intervalo como sendo quadrática e, consequentemente,  $f'$  como sendo linear, só que não respeitando que  $f$  é sempre crescente e portanto  $f'$  teria que ser positiva.

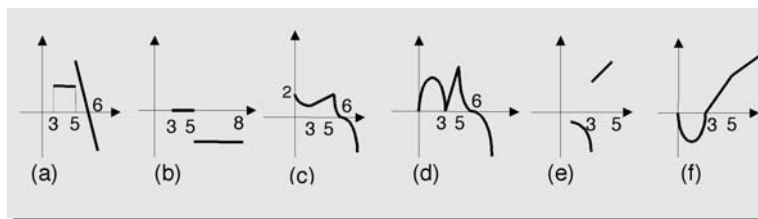
Com a segunda questão do questionário, pretendeu-se que, a partir da interpretação do gráfico da derivada  $f'$  de uma função (Figura 4), os estagiários desenhassem um esboço de um possível gráfico da função  $f$ , relacionando o sinal de  $f'$  com a monotonia de  $f$  e identificando o zero de  $f'$  como um extremo local de  $f$ .



**Figura 4 - Esboço gráfico da função  $f'$ , dado na questão 2 do questionário**

Relativamente ao intervalo  $[0, 3]$ , houve quem representasse (2 estagiários)  $f$  como sendo a imagem geométrica de  $f(x) = -1/3$ . Para isso, começaram por determinar o declive da recta que contém os pontos  $(0,2)$  e

(3,1), definindo algebricamente  $f$  como sendo  $f(x) = -1/3x + 2$ , e derivando  $f$ , obtiveram  $f'(x) = -1/3$  (só que o processo devia ser precisamente ao contrário). Ainda com respeito a este intervalo, houve outras respostas consideradas incorrectas, como se pode observar na Figura 5 (c, d, e, f). Tais respostas parecem ter por base uma interpretação correcta de  $f'$  como sendo uma função afim, e consequentemente  $f$  como sendo uma função quadrática. Só que, ao passarem para a respectiva representação gráfica de  $f$ , preocuparam-se mais em manter este tipo de função do que em relacionar o sinal de  $f'$  com a monotonia de  $f$ .



**Figura 5 - Alguns esboços gráficos da função  $f$ , efectuados pelos estagiários, relativos à questão 2**

No intervalo  $[3, 5]$ , a maioria dos estagiários representou correctamente  $f$ . Contudo, houve quem representasse  $f$  como sendo constante e positiva (Figura 5a) e ainda quem tenha considerado  $f$  como sendo nula (Figura 5b). A ausência da relação entre o sinal de  $f'$  com a monotonia da função também se verifica em esboços relativos ao intervalo  $[5, 8]$ . Houve estagiários que representaram  $f$  como sendo constante e negativa (Figura 5b), como também houve quem tenha representado  $f$  com o mesmo aspecto gráfico de  $f'$  (Figura 5a), como ainda estagiários que representaram  $f$  por uma curva decrescente (Figura 5c, d).

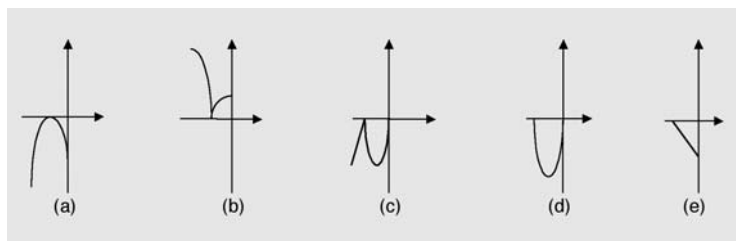
Quanto ao aspecto relativo a  $x = 6$ , zero de  $f'$ , houve estagiários que consideraram este valor como sendo um zero de  $f$  sem o relacionar com um possível extremo local de  $f$  (Figura 5a, c, d, f).

Atente-se no pormenor de haver estagiários que na representação gráfica de  $f$  consideraram “pontos angulosos” num intervalo onde  $f'$  é contínua (Figura 5c, d, f).

Estas mesmas dificuldades manifestadas pelos estagiários em estabelecer graficamente relações entre uma função e a correspondente primeira derivada também foram observadas nas questões 7 e 9.1.

Com a questão 7 pretendia-se que os estagiários desenhassem um possível esboço do gráfico da função  $f$ , a partir das seguintes condições: no intervalo  $] -3, 0[$ ,  $f'(x) < 0$  e existe um ponto de inflexão que é simultaneamente zero da função  $f$ ; no intervalo  $]0, 3[$ ,  $f'(x) > 0$  e  $f(x) > 0$ .

Da análise das representações gráficas apresentadas pelos estagiários, mais uma vez se verifica que não relacionam convenientemente o sinal de  $f'$  com a monotonia de  $f$ , como se pode verificar pelos esboços apresentados relativamente às condições dadas no intervalo  $] -3, 0[$  (Figura 6). Tais respostas parecem dever-se mais à preocupação de obedecer à condição de, neste intervalo, existir um ponto de inflexão que é simultaneamente zero da função. Só assim se pode perceber a ausência de relação entre o sinal de  $f'$  e a monotonia de  $f$ .



**Figura 6 - Alguns esboços gráficos de  $f$ , efectuados pelos estagiários, relativos à questão 7**

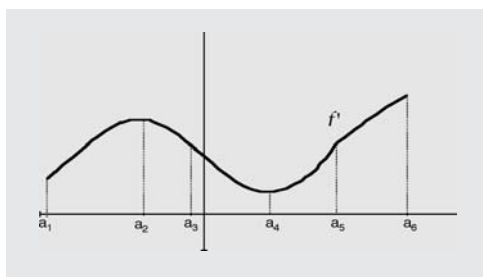
Contudo, tal relação parece ter sido tida em conta em alguns esboços da função no intervalo  $]0, 3[$  (Figura 7).



**Figura 7 - Alguns esboços gráficos de  $f$ , efectuados pelos estagiários, relativos à questão 7**

Há quem tenha considerado correctamente a monotonia de  $f$ , mas esquecendo-se de atender à condição  $f(x) > 0$  (Figura 7a), como também há quem tenha atendido a esta última condição sem, no entanto, considerar que  $f$  teria de ser estritamente crescente (Figura 7b).

A constatação da existência de dificuldades na interpretação da informação explícita no gráfico da 1ª derivada de uma função é reforçada na análise das respostas à questão 9.1, onde se pretendeu que, a partir da observação do gráfico da função  $f'$  definida no intervalo  $[a_1, a_6]$  (Figura 8), indicassem as abcissas onde  $f$  toma o maior e o menor valores.



**Figura 8 - Esboço gráfico de uma função  $f'$ , dado na questão 9 do questionário**

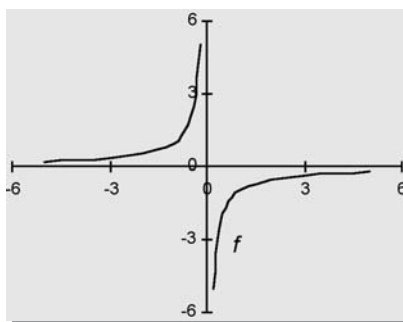
Nove dos estagiários identificaram correctamente a abcissa do maior valor de  $f$ . Apenas dois identificaram correctamente a abcissa do menor valor,

tendo sido  $a_4$  a resposta errada mais frequente. Tais respostas parecem indicar que não consideraram que, pelo facto de  $f'$  ser uma função positiva no intervalo  $[a_1, a_6]$ ,  $f$  seria uma função estritamente crescente.

### ***Relação entre o gráfico de uma função e o da sua 2ª derivada***

Na elaboração do questionário procurou-se, com as questões 3, 4 e 8, criar situações em que se relacionasse o gráfico de uma função com o da sua 2ª derivada.

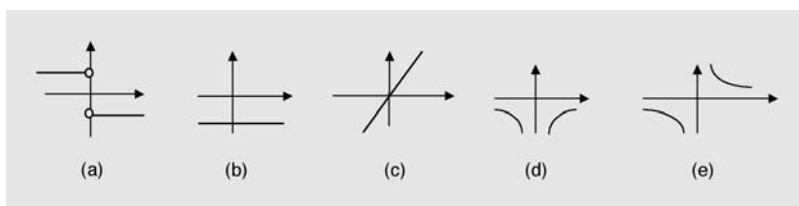
Na questão 3, pedia-se aos estagiários que, a partir do gráfico da função  $f$  (Figura 9), representassem o gráfico da função  $f''$ , esperando-se que relacionassem os sentidos das concavidades do gráfico de  $f$  com o sinal de  $f''$ .



**Figura 9 - Esboço gráfico da função  $f$ ,  
dado na questão 3 do questionário**

Mas tal não aconteceu, tendo havido 7 estagiários que não deram qualquer resposta à questão e 6 que responderam incorrectamente. Dentro destas respostas estão as seguintes representações,



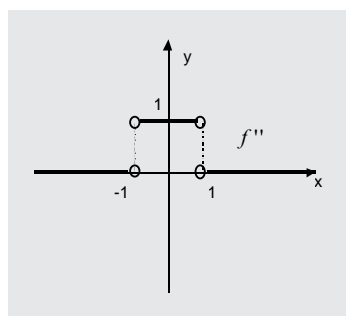


**Figura 10 - Alguns esboços gráficos de  $f''$ ,  
efectuados pelos estagiários, relativos à questão 3**

O esboço apresentado na Figura 10a poderá significar que a função  $f$  foi considerada como sendo, tanto à esquerda como à direita de zero, uma função quadrática. A mesma ideia parece prevalecer em 10b. Contudo, quer nesta representação, quer na representação de 10c salienta-se a consideração de  $0 \in D_{f''}$ , quando  $0 \notin D_f$ . A representação que se mostra em 10c só seria possível se  $f$  fosse uma função cúbica.

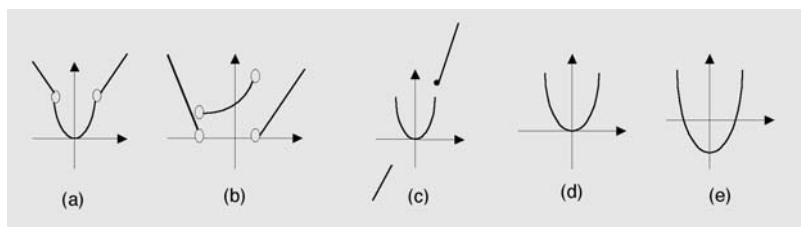
Houve estagiários que tiveram o cuidado de considerar que  $0 \notin D_{f''}$ , mas já não tiveram em conta a relação entre os sentidos das concavidades do gráfico de  $f$  com o respectivo sinal de  $f''$ , como se pode observar nas Figura 10d e 10e.

Na questão 4, pretendia-se que os estagiários desenhassem o esboço de um possível gráfico da função  $f$ , contínua em  $\mathbb{R}$ , a partir da observação do gráfico de  $f''$  (Figura 11).



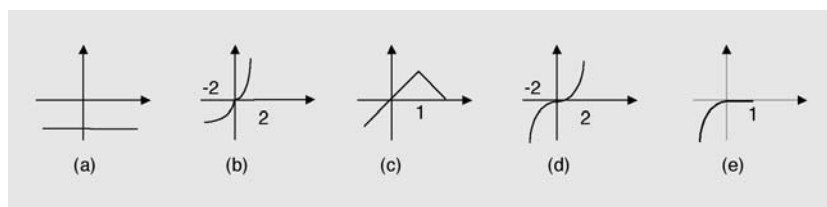
**Figura 11 - Esboço gráfico da função  $f''$ ,  
dado na questão 4 do questionário**

A condição de  $f$  ser contínua, apesar de  $f''$  ter pontos de descontinuidade, parece ter sido uma das causas das dificuldades encontradas relativamente aos pontos de abscissa -1 e 1 (Figura 12a, b, c). Alguns dos estagiários, embora considerando  $f$  como sendo contínua, não a representaram de forma que  $x = -1$  e  $x = 1$  não pertencessem ao domínio de  $f''$  (Figura 12d, e), como também não garantiram que  $f''$  se anularia, quer à esquerda de  $x = -1$ , quer à direita de  $x = 1$ .



**Figura 12 - Alguns esboços gráficos de  $f$ ,  
efectuados pelos estagiários, relativos à questão 4**

Enquanto que os que responderam à questão 4 parecem ter tido em conta a relação entre o sinal de  $f''$  com o sentido da concavidade do gráfico de  $f$ , o mesmo não terá acontecido na questão 8, na qual era pedido o esboço de um possível gráfico de uma função contínua em  $[-2, 2]$ , de modo que  $f'(0) = 0$ ,  $f'(1)$  não existisse e  $f''(x) < 0$  para  $-2 < x < 0$ . De facto, parece poder concluir-se a partir da Figura 13 (a, b, c) que a condição  $f''(x) < 0$  não foi respeitada.



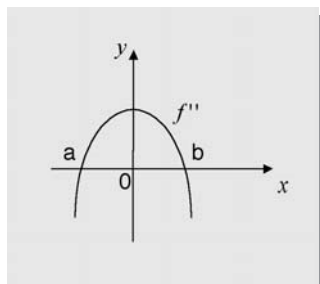
**Figura 13 - Alguns esboços gráficos de  $f$ ,  
efectuados pelos estagiários, relativos à questão 8**

As respostas representadas em 13c, 13d e 13e foram consideradas parcialmente correctas. Em 13c pode ver-se que apenas foram respeitadas as condições  $1 \notin D_{f'}$  e  $f$  ser contínua no intervalo  $[-2, 2]$ . Tanto 13d como 13e mostram que a condição  $1 \notin D_{f'}$  não foi respeitada. Em 13e também não foi considerada a parte do gráfico no intervalo  $[1, 2]$ .

### ***Relação entre os gráficos das funções 1ª derivada e 2ª derivada***

Com as questões 5 e 9.2 pretendeu-se averiguar o tipo de relações que os estagiários estabeleciam entre os gráficos de  $f'$  e de  $f''$ .

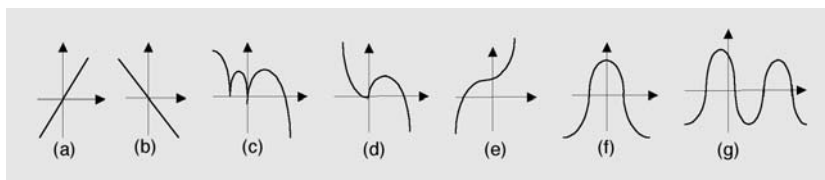
Na questão 5 pedia-se os esboços de um possível gráfico de  $f'$  (alínea 5.1) e de um possível gráfico de  $f$  (alínea 5.2), a partir da observação do gráfico da função  $f''$  (Figura 14),



**Figura 14 - Esboço gráfico de uma função  $f''$ ,  
dado na questão 5 do questionário**

Em 5.1 esperava-se que, no esboço gráfico de  $f'$ , os estagiários realçassem tanto a relação entre o sinal de  $f''$  e a monotonia de  $f'$ , como o significado atribuído aos zeros de  $f''$  no gráfico de  $f'$ .

Mais uma vez, houve estagiários que parecem ter tido um raciocínio inverso ao que se pedia, começando por identificar  $f''$  como uma função quadrática e representando graficamente  $f'$  como uma função linear (Figura 15a, b).



**Figura 15 - Alguns esboços gráficos de  $f'$ ,  
efectuados pelos estagiários, relativos à questão 5.1**

Os registos efectuados pelos estagiários mostram que, em vez de partirem da informação explícita no gráfico de  $f''$ , procuraram obter a sua expressão analítica cuja integração lhes permitisse obter uma expressão para  $f'$ . Contudo, após a representação do gráfico pretendido, os estagiários não tiveram o cuidado de confrontar a informação proveniente do gráfico que lhes fora dado (Figura 14) com o gráfico que esboçaram. Nos esboços apresentados na Figura 15 (c, d, e, f, g) não se verifica a relação entre o sinal de  $f''$  com a monotonia de  $f'$ , nem entre os zeros de  $f''$  com extremos locais de  $f'$ . Deve salientar-se que alguns estagiários parecem ter tido dificuldade em exprimir analiticamente  $f''$  devido à inexistência de valores concretos no lugar das abscissas  $a$  e  $b$ .

Em 5.2, pedia-se um possível esboço gráfico da função  $f$ , o que poderia ser concretizado de duas formas. Partindo da interpretação do gráfico de  $f''$ , poder-se-ia, por um lado, quer relacionar o sinal desta com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , quer considerar o significado atribuído aos zeros de  $f''$  no gráfico de  $f$ . Por outro lado, caso se tivesse conseguido efectuar em 5.1 um possível esboço gráfico de  $f'$ , poder-se-ia usar a informação por este fornecida para esboçar o gráfico de  $f$ . Contudo, 13 dos estagiários não deram qualquer resposta à questão. Das três respostas consideradas incorrectas, duas apresentavam  $f$  como uma função constante e negativa, enquanto a outra a apresentava com seis zeros.

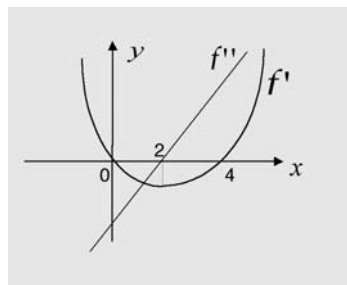
Na questão 9.2, em que se pretendia que, a partir da observação do gráfico de  $f'$  (Figura 8), os estagiários indicassem o maior e o menor valor de  $f''$  num dado intervalo, também se registaram fracos resultados. Houve estagiários que indicaram  $a_6$ ,  $a_4$  e  $a_2$  como sendo o maior valor de  $f''$ . Estas respostas parecem indicar que consideraram  $a_6$  por ser o maior de  $f'$  (logo o

maior de  $f''$ ),  $a_2$  por ser um maximizante de  $f'$  e  $a_4$  por ser um minimizante. Para o menor valor de  $f''$ , houve quem tivesse indicado  $a_2$ ,  $a_4$  (a mais frequente) e  $a_6$ . Estas respostas parecem dever-se ao facto de alguns estagiários não terem relacionado a variação de  $f''$  com a de  $f'$ .

### **Significado dos zeros da 1ª derivada e da 2ª derivada**

Embora nas questões já analisadas se tenha feito referência à interpretação do significado dos zeros de  $f'$  e de  $f''$ , foi com as questões 6 e 10 que se procurou que os estagiários evidenciassem tais significados.

Com a questão 6 pretendeu-se que os estagiários, após observação dos gráficos de  $f'$  e de  $f''$ , representados no mesmo sistema de eixos cartesianos (Figura 16), identificassem, para além do significado dos zeros de  $f'$  e  $f''$ , os intervalos de monotonia de  $f$  e dos sentidos das concavidades do gráfico de  $f$ .



**Figura 16 - Esboço gráfico de  $f'$  e de  $f''$ ,  
dado na questão 6 do questionário**

Sobre  $f(0)$  e  $f(4)$ , surgiram diferentes respostas, tais como:

" $f(0)$  e  $f(4)$  são iguais a uma constante uma vez que  $f'(0) = f'(4) = 0$ ";

" $f(0)$  e  $f(4)$  são pontos de inflexão";

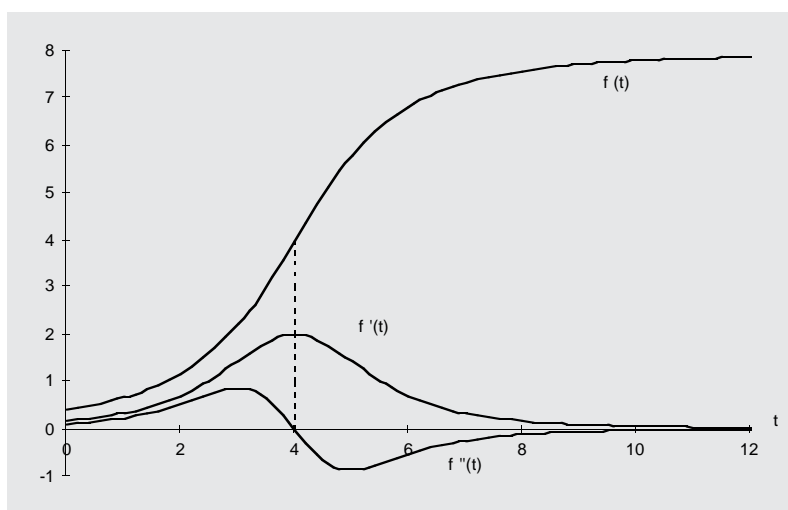
" $f(0) = 0$  e  $f(4) = 0$ ";

" $f(0) < 0$  e  $f(4) < 0$ ";

" $f(0) = 0$  e  $f(4) = 0$ ".

Quanto à identificação do ponto de inflexão do gráfico de  $f$ , embora a maioria dos estagiários tenha respondido correctamente, houve oito que não deram qualquer resposta. Na única resposta incorrecta foi afirmado que “o ponto  $(2, f(2))$  é um zero da função  $f''$ ”. Relativamente aos intervalos de monotonia de  $f$ , algumas das respostas incorrectas parecem indicar que a monotonia de  $f$  foi associada à de  $f'$ , havendo três estagiários que dizem que “ $f$  é crescente para  $x > 2$  e decrescente para  $x < 2$ ”.

A interpretação efectuada pelos estagiários do gráfico da questão 6 é análoga à que fizeram do gráfico da questão 10 (Figura 17), em que se apresentavam uma função e as suas 1ª e 2ª derivadas, representativas de uma situação de contexto real: o número de vendas de um dado produto em função do tempo. Pretendia-se que os estagiários interpretassem o significado, quer de  $f(4)$ , quer de  $f''(t)$  tender para zero quando  $t$  tende para  $+\infty$ .



**Figura 17 - Esboço gráfico de  $f$ ,  $f'$ , e  $f''$ ,  
dado na questão 10 do questionário**

A maioria dos estagiários não identificou correctamente o significado de  $f(4)$ , apresentando respostas do tipo:

*“ $f(4)$  é um ponto de inflexão, quer isto dizer que a partir  $t = 4$  o número de vendas começa a decrescer”;*  
*“em 4 horas fez-se 4 vendas”;*  
*“a segunda derivada para  $t = 4$  é zero, significa que as vendas começam a não crescer tão rapidamente e a estabilizar”;*  
*“significa que o tempo é directamente proporcional ao número de vendas”;*  
*“é um máximo da função”.*

No que respeita ao significado de  $f''(t)$  tender para zero quando  $t$  tende para  $+\infty$ , deveria ser identificado que a velocidade de vendas do produto,  $f'(t)$ , também tende para zero e, consequentemente, o número de vendas tende a estabilizar-se. Alguns estagiários responderam que:

*“à medida que o tempo passa o número de vendas é tendencialmente zero”;*  
*“à medida que o tempo aumenta, o nº de vendas do produto diminui, isto é, o nº de vendas passa a ser zero”;*  
*“que o nº de vendas aumentaria indefinidamente se o tempo para as realizar fosse infinito”.*

Verificou-se assim, mais uma vez, que os estagiários manifestaram dificuldades em interpretar o gráfico de uma função e, principalmente em relacioná-lo com a informação explícita nas suas derivadas. Neste caso particular, os gráficos das derivadas parecem ter contribuído para dificultar a interpretação do gráfico da função.

## Conclusões

Da análise das respostas verifica-se que a maioria dos estagiários não relacionou convenientemente, em termos gráficos, uma função com as suas 1ª e 2ª derivadas, e muito menos relacionou o gráfico da 1ª derivada com o da 2ª. É de notar que, em situações em que os gráficos eram definidos por ramos mais simples (lineares ou constantes), a maioria dos estagiários não apresentou dificuldades em relacionar a informação, o mesmo já não tendo acontecido nas restantes situações.

Os estagiários demonstraram dificuldades sobretudo em:

- relacionar os intervalos de monotonia da primeira derivada com o sinal da segunda derivada;
- considerar os zeros da primeira derivada como extremos da função primitiva, e os zeros da segunda derivada como extremos da primeira derivada;

- considerar os pontos de inflexão do gráfico da 1ª derivada como extremos locais da 2ª derivada;
- considerar os pontos angulosos do gráfico de uma função como pontos que não pertencem ao domínio da sua derivada.

O “esquecimento” dos estagiários em considerarem que as abcissas dos pontos angulosos do gráfico de uma função não pertencem ao domínio da primeira derivada está de acordo com as dificuldades também antes observadas por Artigue (1991).

Quanto ao conflito gerado nas situações em que se procurou que os estagiários estabelecessem relações gráficas entre a 1ª e a 2ª derivadas de uma função, a maioria não conseguiu efectuar um esboço gráfico da 2ª derivada a partir do gráfico da 1ª, e vice-versa. Observaram-se também, com estes estagiários, o mesmo tipo de dificuldades antes identificadas por Dreyfus (1990), que se deverão ao facto de os processos de Cálculo serem, em geral, aprendidos a um nível puramente algorítmico e com pouca utilização de representações gráficas. Por outro lado, a inexistência de valores concretos no gráfico que lhes permitissem representar a função analiticamente e depois derivar/primitivar e representar o gráfico correspondente, parece estar na origem de algumas das dificuldades. Resultados semelhantes a estes são referidos por Ferrini-Mundy e Lauten (1994), por Asiala *et al.* (1997), Orton (1983), Tall (1977) e Artigue (1991).

Contudo, é de salientar que, mesmo sendo dados os gráficos, quer da função, quer das 1ª e 2ª derivadas, como foi o caso da situação de contexto real relativa à venda de um produto em função do tempo, persistiram as dificuldades em relacionar a informação. Parece que, longe de contribuírem para facilitar a compreensão da situação, a informação veiculada pelos gráficos das derivadas pareceu sobrepor-se totalmente à informação explícita no gráfico da função.

Por detrás das dificuldades manifestadas pela maioria dos estagiários parecem estar:

- uma capacidade visual demasiado pobre, a qual dificulta a identificação do tipo de uma função dado o seu gráfico;
- a incapacidade de interligar múltiplas condições numa mesma questão;



- a falta de capacidade de ligar a informação gráfica aos conhecimentos analíticos.

Estas conclusões apontam no sentido da importância de práticas de ensino/aprendizagem de conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações.

## Referências

- ARTIGUE, Michèle (1991). Analysis. In Tall, David (ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 167-198.
- ASIALA, Mark; COTTRILL, Jim; DUBINSKY, Ed & SCHWINGENDORF, Keith (1997). The development of student's graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 399-431.
- ASPINWALL, Leslie; SHAW, Kenneth & PRESMEG, Norma (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.
- BORG, Walter R. & GALL, Meredith D. (1989). *Educational research - an introduction*. Nova York: Longman.
- CASTRO, Encarnación & CASTRO, E. (1997). Representaciones y modelización. In Rico, Luís (coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori, 95-122.
- DES (1997). *Matemática – programas do 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- DREYFUS, Tommy (1990). Advanced mathematical thinking. In Nesher, P. et al. (eds.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. Cambridge: University Press, 113-134.
- EISENBERG, Theodore & DREYFUS, Tommy (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In Zimmermann, Walter & Cunningham, Steve (eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 25-37.
- FERRINI-MUNDI, Joan & LAUTEN, Darien (1994). Learning about calculus learning. *The Mathematics Teacher*, 87 (2), 115-121.
- HALLETT, Deborah H. (1991). Visualization and calculus reform. In Zimmermann, Walter & Cunningham, Steve (eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 121-126.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- ORTON, Anthony (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

- PIMENTEL, Teresa (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades*. Lisboa: APM.
- PONTE, João P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7.
- RIDDLE, Lawrence H. (1994). Introducing the derivative through the iteration of linear functions. *The Mathematics Teacher*, 87 (5), 377-381.
- ROBERTS, A. Wayne (1996). *Calculus the dynamics of change*. Washington: The Mathematical Association of America.
- STICK, Marvin E. (1997). Calculus reform and graphing calculators: a university view. *The Mathematics Teacher*, 90 (5), 356-358.
- TALL, David (1989). *Concept images, computers, and curriculum change*. Orlando: NCTM-Research Pre-session, 1-13.
- TALL, David (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In Biehler, Rolf et al. (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, 189-199.
- TEIXEIRA, Paula; PRECATADO, Adelina; ALBUQUERQUE, Carlos; ANTUNES, Conceição & NÁPOLES, Suzana M. de (1998). *Matemática: funções - 11º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- VINNER, Shlomo (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. In Eisenberg, Theodore & Dreyfus, Tommy (eds.), *Focus on learning problems in mathematics*, 11 (2), 149-156.
- VINNER, Shlomo (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In Harel, Guershon & Dubinsky, Ed (eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America, 195-213.

## MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS' GRAPHICAL INTERPRETATIONS OF THE DERIVATIVE OF A FUNCTION

### Abstract

The Portuguese secondary school mathematics curriculum draws on results of research conducted in the Mathematics Education field to stress the importance of teaching mathematical concepts using, whenever possible, their different representations. Numerical, analytical and graphical approaches to the teaching of the derivative concept are indicated as essential to enhance conceptual meanings and relations. However, in general, students show a

preference for analytical approaches in detriment of the graphical one, which may be the result of predominantly analytical teaching approaches. In this context, the goal of this study was to investigate mathematics student teachers difficulties in interpreting and relating the graphs of a function and those of their derivatives. A questionnaire about graphical representations of the derivative of a function was applied to 19 mathematics student teachers and an interpretative analysis of the results was performed.

#### **INTERPRETATION GRAPHIQUE DES DERIVÉS D'UNE FONCTION CHEZ DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUE**

##### **Résumé**

Les programmes actuels de Mathématique, en cherchant à adopter les orientations qui proviennent des recherches dans le champ de l'Éducation Mathématique, renvoient sur l'importance d'aborder, aussi souvent que possible, les concepts mathématiques à travers ses différentes représentations. Nous cherchons ainsi, à partir d'une approche numérique, analytique et graphique, établir une relation entre les différentes formes de représentation, afin de mettre en évidence sa signification, ainsi comme à réussir que l'apprentissage devienne significatif. Néanmoins, en général, les élèves démontrent préférer l'approche analytique au détriment du graphique, ce qui pourra être dû aux approches de l'enseignement à prédominance analytiques. Dans ce contexte, on a cherché à savoir, à partir d'une analyse interprétative des résultats d'un questionnaire sur les représentations graphiques de la dérivée d'une fonction de mathématiques, appliqué à 19 stagiaires, les difficultés que ceux-ci démontraient à interpréter et à établir un rapport entre les graphiques d'une fonction et ceux de leurs dérivées.